Fit in Mathe

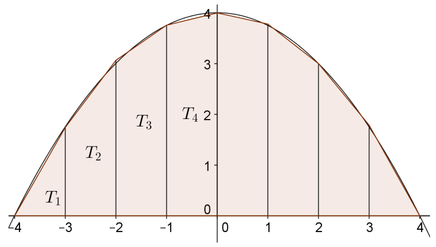
September 2013 Klassenstufe 12

Thema	**Integration**

❶ Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4$ mit Nullstellen bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

Gesucht ist die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse.

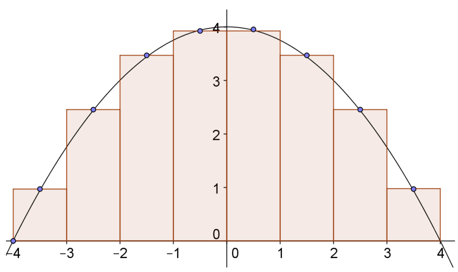
Berechne einen Näherungswert durch 8 einbeschriebene Trapeze. Aus Symmetriegründen reicht es, eine Hälfte zu betrachten und diese zu verdoppeln.



Der Näherungswert ist ____

❷ Der Flächeninhalt wie in Aufg.1 – wieder kann man sich aus Symmetriegründen auf eine Hälfte beschränken- soll durch eine andere Näherung berechnet werden.

Teile die halbe Grundseite (Länge 4) in n gleiche Intervalle. Dann hat jedes die Breite $\frac{4}{n}$. Die Mitte des k-ten Intervalls ist $x_k = -4 + \frac{4}{n}(k - \frac{1}{2})$ mit



$(k = 1, \dots, n)$ und das k-te Rechteck hat die Fläche $F_k^{(n)} = \frac{4}{n} f(x_k)$.

Bilde die Summe $F^{(n)} = F_1^{(n)} + \dots + F_n^{(n)}$.

Durch Anwendung der Formeln

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

lässt sich der Term für $F^{(n)}$ vereinfachen. Ermittle den Grenzwert, gegen den $F^{(n)}$ für $n \to \infty$ strebt.

Die gesamte Fläche ist ___ Drittel groß.

❸ Es gilt $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ für alle $\alpha \in R \setminus \{-1\}$.

a) Berechne das Integral $\int_{-2}^{2} (x^4 - 5x^2 + 4) \, dx$.

b) Berechne die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Die Differenz der Werte ist ____Fünfzehntel.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.

Fit in Mathe

September 2013 Klassenstufe 12

❹ Der Hauptsatz der Integralrechnung sagt:

Ist f eine stetige Funktion, so ist $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ eine differenzierbare Funktion und eine *Stammfunktion* zu f, d.h. $F'(x) = f(x)$.

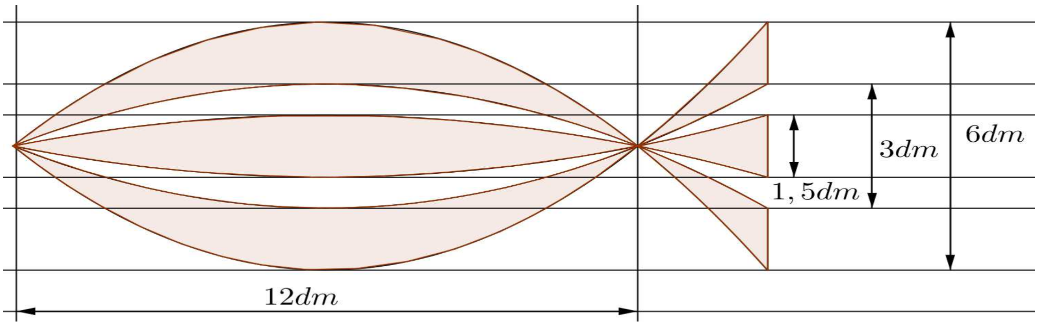
Bestimme die Stammfunktionen mit additiver Konstante 0 zu $f(x) =$

1) $\frac{3}{2}x^2$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 3) $e^{x-1} (e = Eulersche\ Zahl)$ 4) $\ln(10)\cdot 10^x$ 5) $\frac{1}{(x+1)^2}$ 6) $\frac{10}{x}$

Die Summe der Werte F(1) von allen gesuchten Stammfunktionen ist ___

❺ Die Schmuckform unten soll mit Blattgold ausgelegt werden. Die Begrenzungslinien sind Parabeln. $1\,cm^2$ kostet 9 €. Ermittle die Kosten der gesamten Arbeit.

Der Wert der Arbeit auf glatte T€ gerundet ist___.



Lösungen mit Kennsilben														
21 GE	37 TE	65 ON	35 IT	87 EH	20 ER	12 ZE	64 SC	14 LU	22 BR	88 HI	13 CH	36 NG	89 ZE	63 ZA

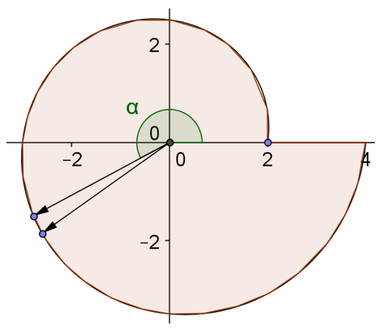
Lösungswort:

❻ (Expertenaufgabe)

Die Randkurve neben stehender „Schneckenfläche“ genügt dem Bildungsgesetz, dass der Abstand r eines Punktes der Kurve vom Ursprung mit zunehmendem Winkel linear wächst, d.h. $r(\alpha) = 2\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$.

Ermittle die Fläche.

(Tipp: Die Gesamtfläche kann als die Summe von kleinen Kreissektoren zwischen den Winkeln α und $\alpha+\Delta\alpha$ angenähert werden. Hierfür kann man analog zur Einführung der Fläche unter einer Kurve eine Unter- und Obersumme bilden und einen Grenzwert für $\Delta\alpha \to 0$ finden.)



Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.